prtana@m.sc.niigata-u.ac.jp

情報社会論
(252S0541)

講義概要
第２回目

アナログからデジタルへ

「アナログ」は対象を連続的量で表現する方法や表現されたもの
「デジタル」は対象を離散的数値で表現する方法や表現されたもの
ビット bit, binary digit の略。
バイト 8 ビットを 1 バイト (byte) という。
ディジタル化 主に，**標本化＋量子化＋符号化**によって実現。

2　アナログとデジタル（１）

- **アナログ**（analog，analogue）: 元来は類似性を持つものと言う意味。ある量を連続的類似性を持つ量で表現することを意味する。
- **デジタル，ディジタル**（digital）: digit は元々は指の意味だが，指で数えることから数字を意味するようになった。digital は数字で表現するの意味だが，特に，離散的量で表現することを意味する。
- **AD 変換（Analog to Digital Conversion）**：アナログデータをデジタルデータに変換すること。DA 変換はその逆。AD 変換は,「標本化」と「量子化」からなる。

2.1　２進法

計算機の内部で数は２進法で扱われることが多いが，機械的にものを認識する場合，２種のものが都合が良いからである。自然数も，これらの組み合わせによって表現される。

これを数学的に説明しよう。数を表す際に通常,「**位取り記数法**」を利用している。例えば，$123 = 1\times 100 + 2\times 10 + 3\times 1$ は，(x の) 多項式 $a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ （降べきの順）において，$x = 10, m = 2$ とし，係数が $a_2 = 1, a_1 = 2, a_0 = 3$ となっている。もちろん，$a_1 x$ は $a_1 x^1$，また $x^0 = 1$ なので，定数項は $a_0 \times x^0 = a_0 x^0$ と考えると多項式は級数 $\sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ になっている。ここで，各係数については，$0 \leqq a_k < x$ の条件が付いている。

定義 2.1 (２進法，２進数，16 進法，16 進数)**.** 任意の自然数 n は，(x の多項式で $x = 2$ とした)

$$n = a_m 2^m + a_{m-1}2^{m-1} + \cdots + a_1 2 + a_0 \quad \left(= 2^m a_m + 2^{m-1}a_{m-1} + \cdots + 2a_1 + a_0\right)$$

の形に一意的に表される。但し，$a_m \neq 0$ (つまり，$a_m = 1$), $a_{m-1}, \cdots, a_1, a_0$ は 0 または 1 である。これを $a_m a_{m-1}\cdots a_1 a_0$ または $(a_m a_{m-1}\cdots a_1 a_0)_{(2)}$ と表し，n の**２進法表示**と言う。このとき，$(a_m a_{m-1}\cdots a_1 a_0)_{(2)}$ を $m+1$ 桁の**２進数**と言う。

同様にして，自然数 n は,

$$a_m 16^m + a_{m-1}16^{m-1} + \cdots + a_1 16 + a_0 \quad \left(= 16^m a_m + 16^{m-1}a_{m-1} + \cdots + 16a_1 + a_0\right)$$

（但し，$a_m \neq 0$ で, $a_{m-1}, \cdots, a_1, a_0$ は $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F$ のどれか）の形の**16 進法表示**で表せる。$m+1$ 桁の **16 進数**を以下のように書く。

$$a_m a_{m-1}\cdots a_1 a_0 \quad \text{または} \quad (a_m a_{m-1}\cdots a_1 a_0)_{(16)}$$

すべての離散的情報は適当な制限を考えると，ある一定の範囲の有限の数と対応づけることができるので，n **進法表示**により n 進数で表現することが可能となる。

例 2.1. $(5)_{(10)} = (101)_{(2)}$, $(7)_{(10)} = (111)_{(2)} = (7)_{(16)}$, $(15)_{(10)} = (1111)_{(2)} = (F)_{(16)}$, $(16)_{(10)} = (10000)_{(2)} = (10)_{(16)}$

演習 2.1. 次の表を埋めてみよう。

10 進数	2 進数				16 進数
0	0	0	0	0	0

10 進数	2 進数				16 進数

2.2 ２進法による情報の表現

計算機では２進法が使われ，その数の範囲を表す基本的単位は，**ビット**，**バイト**と呼ばれる。

定義 2.2 (ビット，バイト). ２進数の１桁分（0 または 1）を表す単位をビット (bit, binary digit の略) と言う。n ビットで表される数を n ビット数という。8 ビットを 1 バイト (byte) という。

命題 2.1. n **ビットで表される数：** n ビットを使うと，$0 \sim 2^n - 1$ までの数（2^n 個の数）を表すことができる。1 ビット当たり２通りの表現が出来るので，その**「場合の数」**の掛け算となるため。

例 2.2. $\boxed{}$ を埋めてみよう。

(1) 7 ビットで， $0000000, 0000001, \cdots, 1111111$ の $\boxed{}$ 種類の数が表現できる。

(2) 8 ビットで， $00000000, 00000001, \cdots, 11111111$ の $\boxed{}$ 種類の数が表現できる。

(3) 16 ビットで， 0000000000000000〜1111111111111111 の $\boxed{}$ 種類の数が表現できる。

2.3 端数処理

端数処理，数値の丸め (the rounding of numbers)：丸めるとは，与えられた数値を，ある一定の丸めの幅の整数倍がつくる系列の中から選んだ数値に置き換えること。この置き換えた数値を**丸めた数値**と呼ぶ。（JIS Z 8401 による「数値の丸め方」参照。）

端数処理には，**切り捨て・切り上げ**の他，様々なものがある。**（広義の）最近接丸め**と呼ばれるものに,「**四捨五入**」,「五捨五超入」,「**偶数への丸め（銀行丸め）**」,「奇数への丸め」がある。

定義 2.3 (端数処理関数). 実数 $x \geqq 0$ に対して，端数処理 A を行って，小数第 n 位（10^{-n}）までの数（$n \in \mathbb{Z}$）にする関数を次のように定義する。

$$Q_A^n(x) := x \text{ の小数第 } n+1 \text{ 位で端数処理 } A \text{ を行って小数第 } n \text{ 位の実数にする}$$

ここで，端数処理 A として「切り捨て (rounddown)」,「切り上げ (roundup)」,「四捨五入 (round)」などがある。特に，$Q_A^0(x)$ は，端数処理をして整数値（$10^{-0} = 1$）とすることを意味し，$n = -m$ $(m > 0)$ に対する $Q_A^n(x)$ は，端数処理をして 10^{-n} の位以上の整数値（10^m）とすることを意味する。また，負の実数 $y \leq 0$ に対しては,（絶対値に対して操作する意味で）以下のように定義する。

$$\widetilde{Q_A^n}(y) := \mathrm{sgn}(y) Q_A^n(|y|) \text{ ただし, } \mathrm{sgn}(y) \text{ は符号関数，つまり } \mathrm{sgn}(y) = \begin{cases} 1 & (y > 0) \\ 0 & (y = 0) \\ -1 & (y < 0) \end{cases}$$

演習 2.2. 次の値を計算してみよう。

(1) $Q^1_{\text{四捨五入}}(66.666) =$

(2) $Q^{-1}_{\text{四捨五入}}(66.666) =$

(3) $\widetilde{Q^0}_{\text{切り捨て}}(66.666) =$
(4) $\widetilde{Q^2}_{\text{四捨五入}}(-3.456) =$

注意 2.1. Microsoft Excel (©Microsoft 2019) における端数処理関数（関数名 (数値, 桁数)）には **ROUND**(x,n), **ROUNDUP**(x,n), **ROUNDDOWN**(x,n) がある。それぞれは，定義 2.3 の端数処理関数 $\widetilde{Q}$ で表すと以下のようになる。

$$\mathbf{ROUND}(x,n) = \widetilde{Q^n}_{\text{四捨五入}}(x)$$
$$\mathbf{ROUNDUP}(x,n) = \widetilde{Q^n}_{\text{切り上げ}}(x)$$
$$\mathbf{ROUNDDOWN}(x,n) = \widetilde{Q^n}_{\text{切り捨て}}(x)$$

アナログ信号からデジタル信号への変換（AD 変換）を行う際，誤差の発生は避けられない。アナログ信号は連続的で無限の正確さを伴う場合が多く，デジタル信号では量子化の解像度や AD 変換回路のビット数に依存する（詳しくは次節を参照）。実際のアナログ値と変換時に「丸め」られた（端数処理）近似的デジタル値の差を**量子化誤差**と呼ぶ。

通常，量子化する場合には，各時刻における（アナログ）信号の実数値を端数処理して有限小数または整数値で表現することが多い。特に，小数展開表示した時に，有効桁数を考えて小数点第 n 位を四捨五入することが一般的に行われる。これを実際にやってみよう。

演習 2.3. 正の実数 $x > 0$ で定義された実数値関数 $f(x) = x$ に対して，$y = Q^0_{\text{四捨五入}}(f(x))$ のグラフを作図せよ。

2.4 標本化と量子化

標本化 (Space Sampling)：対象となるデータを一定の間隔で抽出して離散的量にすること。
量子化 (Quantization)：標本化されたデータの性質を一定の数で表すこと。

標本化の例

- **音声の場合**：波形を時間で区切りそれを一つ一つのデータと見ること。１秒間で区切る数を**標本化周波数**という。CD の標本化周波数は $44.1kHz$。
- **静止画の場合**：画像をピクセルに分解すること。つまり，２次元の画像空間内に，特定の間隔で離散点を設定し，それらの離散点での輝度値で画像を表現する。通常のディスプレイは 96dpi，プリンタは 300dpi 以上の解像度[24]が必要とされている。

量子化の例

- **音声の場合**：波形を何段の階段関数で表すかをビット数で表したものを**量子化ビット数**という。CD の場合は 16 ビット，即ち，最高 $2^{16} = 65536$ 段階である。
- **静止画の場合**：各ピクセルを何色（しょく）で表すかを**階調**という。通常のコンピュータのカラーディスプレイの場合は，**赤緑青 (RGB)** の３色をそれぞれ８ビットずつ，0〜255 の 256 階調，すなわち約 1677 万色（$2^8 \times 2^8 \times 2^8 = 2^{24}$）で表している。

[24] **d**pi = **d**ot **p**er **i**nch. Microsoft Windows は，ディスプレイには 96dpi の性能があるものと仮定している。

標本化間隔＝標本化周波数＝**サンプリング周波数** (単位は**ヘルツ Hz** を使用)
　　＝１秒間に標本をとる回数。CD の場合は，１秒間に 44100 回標本をとっている。
量子化間隔＝量子化ビット数＝**ビット深度** (単位は**ビット bit** を使用)
　　＝表す数値を $2^{量子化ビット数}$ の数分だけ階段を考える。CD は $2^{16} = 65536$ 段階。
ビットレート＝**標本化間隔** × **量子化間隔** × **チャンネル数**
　　＝１秒当たりの最大データ量 (単位は**ビット毎秒 bps (bit/s)** を使用)
　　※通常のステレオなら２チャンネル。
　　PCM[25]（圧縮なし）のビットレートなら 1,411.2kbps となる。

演習 2.4. 一般的な音楽 CD のビットレートが 1,411.2kbps となることを計算して確かめよ。

信号 (signal)：信号とは,「物理系の状態に関する情報を何らかの方法で伝達する量」と定義され，情報を伝達するために記号化，符号化したものと解釈することが多い。情報の種類により，電気信号，音声信号，画像信号と呼んだり，時間の関数とみるときに，連続時間信号に対して**アナログ信号**，**多値信号**，離散時間信号に対して**サンプル値信号**，**デジタル信号（ディジタル信号）**という呼び方がある。多値信号とディジタル信号は，それぞれ，アナログ信号とサンプル値信号を量子化したものである。

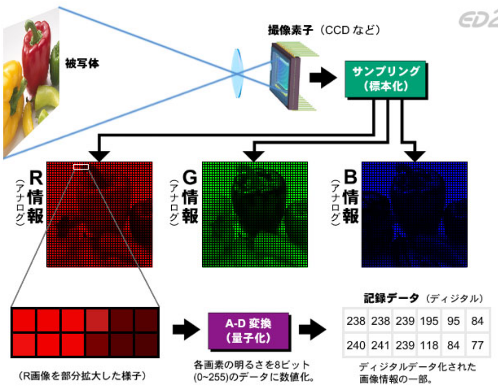

図 2.1: **静止画情報の標本化・量子化**

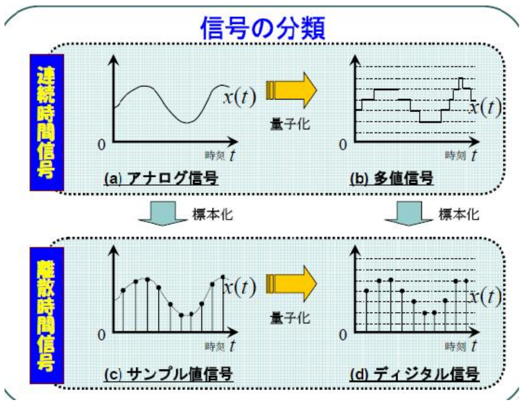

図 2.2: **様々な信号**

信号を数学的に表すために，次のような三角関数で記述される，**正弦波信号** (sinusoidal signal) を用いることが多い。

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi)$$

ただし，ω_0 ラジアン (rad) は **(基本) 角周波数** (angular frequency) （**(基本) 角振動数**ともいう）, ϕ ラジアン (rad) は**位相** (phase)，A は**（最大）振幅** (amplitude) を表す。各周波数や位相が異なると別の波として区別がつくし，振幅の大きさがある程度異なれば区別がつく。この性質を利用して周波数の高い波に情報を乗せて伝送する技術を**変調**と呼んでいる。

[25] パルス符号変調 **P**ulse **C**ode **M**odulation